מטריקת נהגי המוניות כהסבר לשיטת רש"י בכמה סוגיות במסכת עירובין

אלי בגנו[1] – אריה הנל[2]

בכמה וכמה סוגיות במסכת עירובין נראה שרש"י מתעלם מהכלל הידוע "כל אמתא בריבועא – אמתא ושני חומשי באלכסונא" שהוא ניסוח בלשון הגמרא של משפט פיתגורס. בכל פעם שרש"י מתעלם מכלל זה, זועקים כל הראשונים על פירושו. במאמר זה נרצה לטעון ששימוש במטריקת נהגי המוניות עשוי לפתור בעיות שצצות בפירוש רש"י.

רקע מתמטי

כידוע, הגדרת המרחק בין שתי נקודות היא אורכו של הקטע הקצר ביותר המחבר ביניהן. האם זוהי הדרך היחידה להגדיר מרחק בין שתי נקודות? מסתבר שיש עוד דרכים. אם המרחק אינו בהכרח אורכו של הקטע הקצר ביותר, מהי התכונה ההופכת את המרחק להיות ראוי לשמו?

ברור שהמרחק בין כל שתי נקודות, בכל דרך שנרצה להגדיר אותו, חייב להיות מספר ממשי. נמנה שלוש תכונות אותן אנו דורשים מכל מי שמתיימר להיקרא "מרחק".

1. ד"ר אלי בגנו, נשוי ואב לחמישה, מתגורר בירושלים. הוא קבל תואר שלישי מאוניברסיטת בר אילן. כיום הוא מרצה במחלקה למתמטיקה במרכז אקדמי לב ובמכללה ירושלים אשר בבית וגן. דוא"ל: bagnoe@g.jct.ac.il.

2. אריה הנל, נשוי ואב למישה, נולד בצרפת, ועלה לארץ בתשנ"ג. הוא למד בישיבת עץ חיים בצרפת, בכפר מימון, ובכרם ביבנה. בוגר מכון לב (המרכז האקדמי לב, ירושלים) בהנדסת מחשבים, ובעל תואר שני במנהל עסקים. עובד בחברת Cisco בתור מומחה באבטחת מידע ומלמד אבטחת תכנה במרכז אקדמי לב. דוא"ל: haenel@gmail.com.

א. המרחק בין נקודה אחת לשנייה שווה למרחק בין השנייה לראשונה.
ב. המרחק בין כל שתי נקודות הוא אי שלילי. מרחק אפס מתקבל רק בין נקודה לעצמה.
ג. אם נתונות שלש נקודות, א׳, ב׳ ו ג׳, אז סכום המרחקים מנקודה א׳ לנקודה ב׳ ומנקודה ב׳ אל הנקודה ג׳ גדול או שווה למרחק בין נקודה א׳ לנקודה ג׳.

הנה התכונות האלה שוב, מנוסחות הפעם בלשון מתמטית.

הגדרה:

תהי X קבוצה כלשהי של עצמים. פונקציה $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ (כאן, $\mathbb{R}$ מסמל את קבוצת המספרים הממשיים) נקראת **מטריקה** אם מתקיימות שלוש התכונות הבאות:

א. לכל $x,y\in X$ מתקיים $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$.

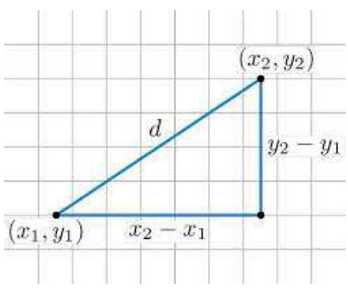
ב. לכל $x,y\in X$ מתקיים $\mathrm{d}(x,y)\geq 0$ ו $\mathrm{d}(x,y)=0$ אם ורק אם $x=y$.

ג.לכל x,y,z מתקיים $\mathrm{d}(x,z)\leq \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$.

במישור ובמרחב, המרחק הרגיל בין שתי נקודות מחושב באמצעות משפט פיתגורס. באופן מתמטי זה מוגדר כך (במישור):

הגדרה:

אם (x_2,y_2), (x_1,y_1) הן שתי נקודות במישור, אז **המרחק האוקלידי** ביניהן מוגדר ע״י $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



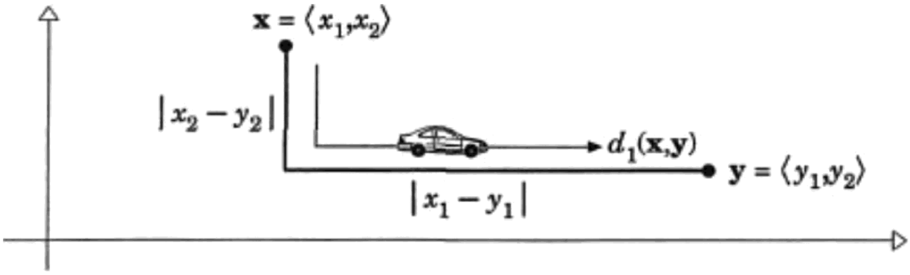
איור 1: מרחק אוקלידי במישור

ברחבי העולם המתמטי מקובל לעבוד עם עוד מטריקות. אחת מהן היא זו הקרוייה ״מטריקת נהגי המוניות״ או ״מטריקת מנהטן״ המוגדרת כך:

לכל $\mathbb{R}^2 \in \ ,(x_1,y_1),(x_2,y_2)$:

$$d1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

($\mathbb{R}^2$ הוא המישור).



איור 2 : מטריקת נהגי המוניות

כדי להבין את המטריקה הזאת, נחשוב על הרחובות של העיר מנהטן שבנויים במתכונת של שתי וערב.[3] נהג מונית שנמצא בצומת רחובות מסוים ורוצה להגיע לצומת אחר, אינו יכול לנסוע בדרך הקצרה ביותר שהיא האלכסון של המלבן ששניים מקדקודיו הם שני הצמתים הנתונים, בלי לדרוס את הבתים שנמצאים באמצע. מבחינתו של נהג המונית, הדרך הקצרה ביותר האפשרית היא סכום הדרכים – האחת בכיוון ציר ה־x והשנייה בכיוון ציר ה־y .

בחזרה למתמטיקה: בהינתן מטריקה כלשהיא, d, המוגדרת על איזו שהיא קבוצה X, נוהגים להגדיר את **הכדור הסגור**, שכפי שנראה מיד, מהווה הכללה של המושג כדור המוכר לכל חובבי הספורט בעולם. הנה תחילה, ההגדרה המתמטית.

הגדרה:

תהי X קבוצה ותהי $d: X\times X \rightarrow \mathbb{R}$ מטריקה המוגדרת ב X.

לכל נקודה a במרחב X ולכל $r \geq 0$ ממשי **הכדור הסגור ברדיוס** r **סביב הנקודה** a הוא הקבוצה $B_a(r) = \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$

בעברית, זוהי קבוצת כל הנקודות שמרחקן מהנקודה a אינו עולה על r.

כיצד נראה הכדור הסגור ביחס למטריקה האוקלידית, d_2, כאשר היא מוגדרת במישור?

3. אנו מתעלמים כאן מ- Broadway שמפר את הסדר בהיותו אלכסוני.

$$\mathrm{B}_a(r) \;=\; \{\,(x_1,x_2)\;\in \mathbb{R}^2 \;\mid\; \mathrm{d}_2\,((x_1,x_2)\,,(a_1,a_2)) \le r\,\}$$
$$=\; \{\,(x_1,x_2)\;\in \mathbb{R}^2 \;\mid\; (a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 \le r\,\}$$

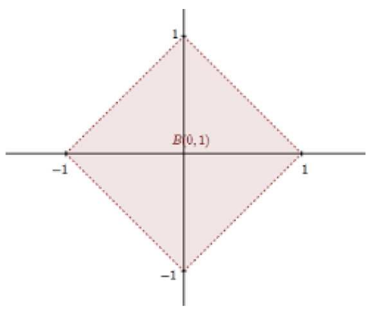
כידוע, המקום הגיאומטרי של הנקודות מהצורה (x_1, y_1) במישור $\mathbb{R}^2$ המקיימות את אי השוויון:

$$(a_1 - x_1) + (a_2 - x_2) \le r$$

הוא **העיגול הסגור** במישור שמרכזו בנקודה (a_1, a_2) ורדיוסו r (הכוונה כאן לא רק למעטפת, שנקראת **מעגל** אלא גם לחלק הפנימי).

באופן דומה, ניתן להראות שהכדור הסגור ביחס למטריקה האוקלידית d_2, כאשר היא מוגדרת במרחב התלת מימדי, הוא מה שנהוג לכנות גם בשפת היום יום בשם **כדור** שמרכזו בנקודה (a_1, a_2) ורדיוסו r.

כאשר אנו משנים את המטריקה, הצורה הגיאומטרית של הכדור עשויה להשתנות. ניתן להוכיח (וזה אכן ניתן כתרגיל בקורסים במבוא למרחבים מטרים) שבמקרה של מטריקת נהגי המוניות, כדור היחידה נראה כמו בציור הבא:



איור 3 : כדור היחידה במטריקת נהגי המוניות

מסכת עירובין גדושה בסוגיות גיאומטריות. החל מרוחבו המינימלי של מבוי, 9 עבור דרך ממדיו של סולם שמפריד בין שתי חצרות, וכלה בתחום שבת. משפט פיתגורס שטוען שסכום ריבועי שני הניצבים במשולש ישר זווית שווה לריבוע היתר מופיע באופן טבעי בסוגיות מתמטיות. בלשון הגמרא, הוא מנוסח כך:

"כל אמתא בריבועא – אמתא ושני חומשי באלכסונא"

הסבר: אורך האלכסון של ריבוע שאורך צלעו יחידה אחת הוא יחידה ושתי חמישיות (קירוב ל $\sqrt{2}$).

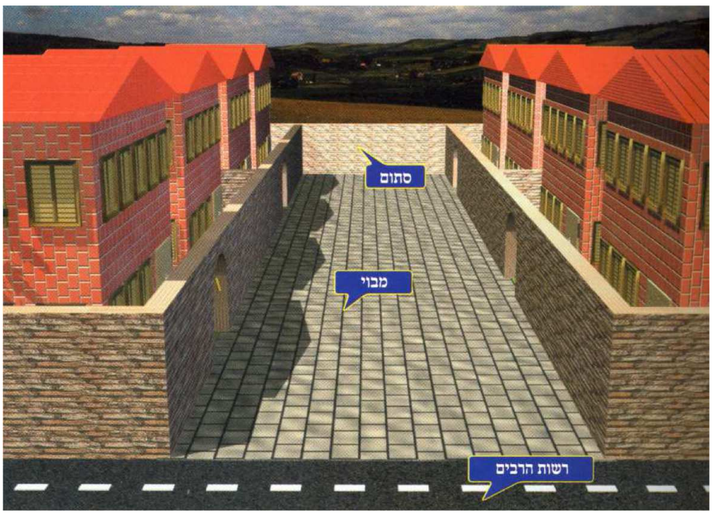
בחלק מהסוגיות, נראה שרש"י מתעלם באופן שיטתי ממשפט פיתגורס. שוב ושוב מעירים שאר הראשונים שרש"י "לא דק". להלן, ננסה לעמוד על כמה מהסוגיות ולהציע הסבר טבעי המבוסס על מטריקת נהגי המוניות.

א. סוגיית מבוי 4 טפחים

הגמרא במסכת עירובין (ה ע"א), מביאה את שיטתו של אביי- שיעור אורכו של מבוי צריך להיות לפחות ארבע אמות. כהוכחה (חלקית) לשיטתו, מביאה הגמרא את הברייתא:

> "אין מבוי ניתר בלחי וקורה עד שיהו בתים וחצרות פתוחים לתוכו, ואי בארבעה, היכי משכחת לה?"

פירוש הדברים: מבוי תקני צריך להיות בנוי כך שלאורכו יש מקום לפחות לשתי חצרות (שהמבוי תוחם אותן) ובכל חצר לפחות שני בתים. כיוון שבאופן כללי, אורכו של פתח של חצר הוא לפחות ארבעה טפחים, אם כל אורך המבוי אינו צריך לעלות על ארבעה טפחים, כיצד יהיה מקום אפילו לחצר אחת?[4]



איור 4 – מבוי[5]

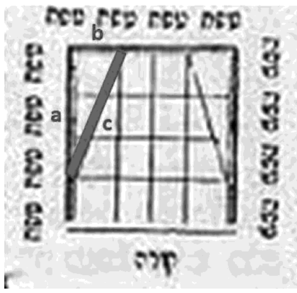
4. יצוין שמכאן יש הוכחה רק לכך שאורכו של מבוי הוא לפחות ארבעה טפחים, אין כאן הוכחה מפורשת לכך שהאורך צריך להיות לפחות 4 אמות. ואולם, מידת האורך המקובלת הבאה עבור מקום היא ארבע אמות.

5. באדיבות "מאורות הדף היומי".

רב יוסף חולק על שיטת אביי. לדעתו, אורכו של המבוי אינו צריך לעלות על ארבעה טפחים. כיצד יפרנס רב יוסף את הברייתא? משיבה הגמרא: "ורב יוסף – דפתח לה בקרן זוית".

רש"י מסביר (ד"ה "בקרן זוית"): "טפח מן הפתח בדופן האמצעי ו ג' טפחים בדופן המשך..."

אם ניעזר באיור 5 המופיע במהדורות ש"ס וילנא בתוך דברי רש"י, וכפי שהתוספות מבינים את רש"י, הרי רש"י רוצה לטעון שהאלכסון c המסומן באיור בקו עבה, אורכו ארבעה טפחים.



איור 5

במונחים מתמטיים, הנתונים הם: $a=3\,, b=1\,, c=4$.

השאלה על רש"י זועקת לשמים, שהרי לפי משפט פיתגורס אורך האלכסון צריך להיות מחושב כך: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}\approx 3.16$.

תוספות (ד"ה "דפתח ליה בקרן זוית"), מוציאים את הזעקה לאוויר העולם: "ולא דק, דאם כן, אין הפתח רחב אלא אלכסון של שלשה טפחים על טפח והנה עינינו רואות שאין האלכסון של שלשה על אחד מגיע לאלכסון של טפח על טפח".

ברור מדברי התוספות שהקושיה שהייתה קשה להם, היא היא הקושיה שלנו. אלא שגם דברי התוספות עצמם צריכים הסבר. האלכסון של טפח על טפח הוא $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$. האם באמת מתכוונים התוספות לומר שהאלכסון של שלושה על אחד ($\sqrt{10}\approx 3.16$, כפי שחישבנו לעיל) אינו מגיע לאלכסון של טפח על טפח ($\sqrt{2}\approx 1.41$)?

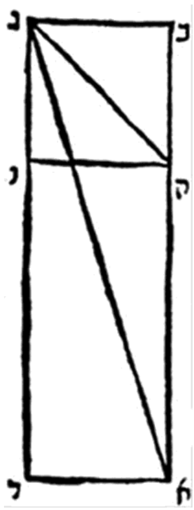
המהרלב"ח[6] תמה על דברי תוספות אלה.

6. שו"ת מהרלב"ח, סימן יג.

בלשונו:

> דברי תוספות כפי פשטן ודאי הם שקר גמור שהרי פשטא דבריהם הוא שקו א׳ג׳ שהוא אלכסון שלשה על אחד אינו גדול בקו ה׳ג׳ שהוא אלכסון טפח על טפח ואין בעולם שקר מפורסם יותר מזה.

טענתו של המהרלב"ח היא פשוטה. כפי שניתן לראות באיור 6, היתר (האלכסון) של המשולש א׳ב׳ג׳ ודאי גדול מהאלכסון של המשולש ב׳ג׳ה׳, בניגוד למה שמשתמע מפשט דברי התוספות.



איור 6

ליתר ביאור, המהרלב"ח מוסיף עוד טענה על דברי התוספות.

תורף טענת התוספות היא שרש"י לא דייק בדבריו. טוען המהרלב"ח שכדי לשכנענו שרש"י לא דק, היו יכולים התוספות לטעון את הטענה המפורסמת בימינו בשם **אי שוויון המשולש**, דהיינו סכום שתי צלעות במשולש גדול תמיד מהצלע השלישית. טענה זו מובילה לסתירה מידית של דברי רש"י, כיוון שלשיטתו, סכום הצלעות א׳ב׳ (3 טפחים) ו ב׳ג׳ (טפח אחד) הוא 4 טפחים, וכפי שמוסיף המהרלב"ח, "**זוהי הערה חזקה באמת**".

לכן מסביר המהרלב"ח שקושיית תוספות על רש"י, כך היא:

לא די שהאלכסון א׳ג׳ קטן מסכום הצלעות א׳ב׳ ו ב׳ג׳ אלא אפילו אם נחתוך את הצלע א׳ב׳ בנקודה ה׳, ומשם נעביר אלכסון אל הנקודה ג׳, (זהו האלכסון של הריבוע העליון שמידותיו טפח על טפח) עדיין דרך זו ארוכה יותר מהדרך הישירה מנקודה א׳ לנקודה ג׳ הצועדת במסלול האלכסון א׳ג׳.

יוצא מכך שדברי התוספות "עינינו רואות שאין האלכסון של שלשה על אחד מגיע לאלכסון של טפח על טפח", אינם מתייחסים אל ההשוואה בין האלכסון א'ג' ובין האלכסון ה'ג' אלא אל ההשוואה בין הקו השבור א'ה'ג' (המתקבל ע"י הוספת הקטע א'ה' אל האלכסון של הריבוע שממדיו טפח על טפח) ובין האלכסון א'ג'. טענה זו, ודאי נכונה היא, באשר הקטע א'ה'ג' הוא סכום שתי צלעות במשולש שקדקדיו א', ה' ו-ג' והאלכסון א'ג' הוא הצלע השלישית.

בלשונו של המהרלב"ח:

> וכל כוונתם הייתה להודיענו שלא מבעיא שאין האלכסון הנזכר (א'ג') מגיע לכל השיעור שאמר רש"י שהם שני קוי המשולש הגדול הנזכר (א'ב'+ב'ג') אלא אפילו לשיעור האלכסון טפח על טפח (ה'ג') **בשנשים אותו בצורה הנזכר במקום טפח על טפח** (=נצמיד אותו אל הצלע א'ה') **אינו מגיע.**

לפי הסבר המהרלב"ח, תוספות מציגים מעין סקיצה של הוכחה לאי שוויון המשולש. ולא.
אנו רוצים להראות שהדרך הקצרה ביותר מנקודה א' לנקודה ג' היא בעזרת האלכסון א'ג'. לשם כך, יש להראות שכל אפשרות אחרת תהיה ארוכה יותר. התוספות נותנים רק דוגמה אחת שהיא נוחה לחישוב: הדרך מנקודה א' לנקודה ה' ומשם אל הנקודה ג'. כעת, כאילו אומרים התוספות, קל לראות שכל דרך אחרת עדיין תהיה ארוכה יותר מהדרך המשתמשת באלכסון א'ג'.

בעל לשון הזהב מיישב את שיטת רש"י באופן מפתיע. הנה דבריו:

> "אמנם לתרץ פירש"י יש לומר דרש"י סבירא ליה שגם זה מקרי פתח ד' שלשה טפחים מאורך ו- א' ברוחב וכן עשה הפתח ולא באלכסון ששיעורין אלה הם הלכה למשה מסיני בלא טעם".

אם כן, לשיטתו, יש להבין את דברי רש"י כפשוטם. למרות שיש כאן סתירה למשפט פיתגורס, קיבלנו כהלכה למשה מסיני לחשב מרחק של ארבעה טפחים דווקא בדרך זו ולא באופן אחר.

בהמשך, ננסה לתת צידוק מתמטי לגישה זו.

ב. סוגיית סולם

המשנה במסכת עירובין (עו ע"ב) דנה בשתי חצרות שכותל שגובהו עשרה טפחים מפריד ביניהן. במקרה זה כל חצר נחשבת בפני עצמה לעניין עירוב, ואין תושבי שתי החצרות יכולים לערב יחד.

ואולם, הגמרא בדף עח ע"א מעירה שאם יש סולם העומד בצד הכותל, ניתן בכל זאת לראות את שתי החצרות כחצר אחת ולכן יכולים תושבי שתי החצרות לעשות עירוב משותף.

בעניין אורכו של סולם אומרת הגמרא:

> **אמר רב יהודה אמר שמואל כותל עשרה צריך סולם ארבעה עשר להתירו. רב יוסף אמר אפילו שלשה עשר ומשהוא. אביי אמר אפילו אחד עשר ומשהוא. רב הונא בריה דרב יהושע אמר אפילו תשעה ומשהו.**

רש"י במקום:

> "סולם ארבעה עשר – שצריך למשוך רגלי הסולם ארבעה מן הכותל לפי שאין סולם זקוף נוח לעלות".

דעת שמואל לפי רש"י היא שאורך הסולם צריך להיות ארבעה עשר טפחים, כיון שגובה הכותל הוא עשרה טפחים. כלומר אם נוסיף ארבעה טפחים על הקרקע לעשרת הטפחים של הכותל, נקבל ארבעה עשר טפחים.

לשיטת רש"י, הנחת העבודה היא שכדי שיהיה נוח לטפס על הסולם, צריכה **הנקודה** בה מונח הסולם על הארץ להיות **רחוקה מתחתית הכותל לפחות ארבעה טפחים**. אחרת, אם הסולם זקוף מדי, לא יהיה נוח לעלות עליו.

גם כאן מעירים התוספות:

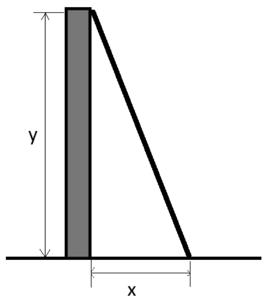
> **ולא דק, דכי משיך ליה י' טפחים נמי מן הכותל שהוא שיעור גובה הכותל יגיע ראש הסולם לראש הכותל דארבעה עשר הוא שיעור אלכסון של י' על י' דכל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשי באלכסונא.**

(פירוש: אם נרחיק את הסולם מרגלי הכותל 10 טפחים, כלומר אם פיסת הקרקע שבין ירכתי הכותל ובין רגלי הסולם תהיה באורך 10 טפחים, אכן לפי משפט פיתגורס אורך הסולם יהיה ארבעה עשר טפחים).

לכן נוקטים התוספות שלדעת שמואל הנקודה שבה עומד הסולם רחוקה מרגלי הכותל עשרה טפחים, כגובה הכותל.

כדי להבין טוב יותר את דברי התוספות, נשתמש בסימונים מתמטיים.

אם נסמן ב-x את המרחק מרגלי הכותל אל רגלי הסולם, ב-y את הגובה של הסולם, כלומר הגובה שתופס הסולם לאורך הכותל. הרי בשלב זה מנסים התוספות להניח שֶ-x קבוע ושווה ל 10.



איור 7

בהסתמך על הנחה זו, ממשיכים התוספות ושואלים: לפי שיטת רב יוסף, שאורך הסולם י"ג ומשהו, (בהנחה שפיסת הקרקע היא 10 טפחים, כאמור), ראשו של הסולם נמצא בערך בגובה $x = \sqrt{(13+\varepsilon)^2 - 10^2} \approx 8.3$ שהוא בלשון התוספות: "יהא ראש הכותל גבוה מן הסולם יתר מטפח" (האות ε היא הדרך המתמטית שלנו לסמן את ה"משהו" המוזכר בגמרא).

לפי שיטת אביי, שאורך הסולם הוא י"א ומשהו, ראשו של הסולם נמצא בערך בגובה $\sqrt{(11+\varepsilon)^2 - 10^2} \approx 4.58$ כלומר רחוק 5.42 טפחים מראש הכותל. כלומר, למרות שאביי הוריד רק שלושה טפחים מאורך הסולם של שמואל, בגובה הכותל ראש הסולם רחוק מראש הכותל "יותר משלשה טפחים" (ליתר דיוק 5.42 טפחים) בלשון מתמטית $y \approx 4.58$.

לשם המחשת הרעיון, לוקחים התוספות מקרה קיצון:

> "שהרי אם לא היה הסולם אלא עשרה טפחים ממה נפשך הוי מתרחק יותר מ ד' טפחים שהרי יפול הסולם לגמרי על הארץ".

כלומר אם נוריד רק 4 טפחים מאורכו של הסולם של שמואל, על פי משפט פיתגורס גובהו של ראש הסולם מהקרקע יהיה $\sqrt{10^2 - 10^2} = 0$, כלומר "יפול הסולם לגמרי לארץ".

לסיכום, במהלך זה ניסו תוספות לקבע את רגלי הסולם (x) במרחק עשרה טפחים מהכותל. כפי שראינו, קיצור אורך הסולם $\sqrt{x^2+y^2}$ מביא לקיצור גובה הסולם (y) בצורה ריבועית ולא לינארית.

כעת, עוברים התוספות לניסיון לקבע את ראש הסולם בראש הכותל, כלומר $y=10$, ולשנות את אורך הסולם $\sqrt{x^2+y^2}$ בהדרגה, לפי שיטות האמוראים.

בלשונם:

> "וגם אין נראה, דלרב יוסף ואביי נמי נשען ראש הסולם לראש הכותל אלא שמקרבין רגלי הסולם יותר מלשמואל ולאביי יהיה קרוב לזקוף. דלמה להם למנקט האי שעורא?"

משמעות דברי התוספות: אם נקבע $y=10$, לשיטת שמואל נקבל $x=\sqrt{14^2-10^2}\approx 9.798$.
לשיטת רב יוסף נקבל $x=\sqrt{(13+\varepsilon)^2-10^2}\approx 8.3$.
ולשיטת אביי: $x=\sqrt{(11+\varepsilon)^2-10^2}\approx 4.58$.

מסבירים תוספות שבמקרה של אביי הסולם זקוף מדי, כך שאין אפשרות להשתמש בו בנוחות, כפי שהחישובים מורים: $\theta=ArcSin\left(\frac{10}{11}\right)\approx 65.38°$. זוהי זווית שיפוע של סולם שלא נוח לעלות עליו.[7]

בפירוש השלישי התוספות נוקטים בשיטת ביניים ומקבעים את המשוואה $x=y$:

> "נראה לר"י דלסימנא בעלמא נקטיה הכי דלעולם צריך להרחיק הסולם כשעור גובה שנשען על הכותל"

התוספות ממשיכים:

> "ושלא יהיה גובה הכותל מן הסולם טפח לרב יוסף... **ולרב יוסף סגייא במשהוא ושלש עשרה פחות שני חומשין שהוא אלכסון של ט' על ט'**".

כלומר: לרב יוסף הסולם אינו מגיע עד סוף הכותל אלא מספיק שיסתיים בתוך טפח מראש הכותל. באופן מתמטי: $y=9+\varepsilon$.

כדי שהמשולש יהיה שווה שוקיים, דורשים התוספות $x=y=9+\varepsilon$. חישוב המסתמך על משפט פיתגורס יתן לנו שאורכו של הסולם הוא בערך: $\sqrt{9^2+9^2}\approx 12.7279$

7. עוד שואלים התוספות על שתי האפשרויות האחרונות בהסבר הגמרא, איזה צורך יש בהוספת ה"משהו" לשיטות רב יוסף ואביי?

אמנם המספר 12.7279, קרוב יותר לשלוש עשרה פחות חומש מאשר לשלוש עשרה פחות שני חומשין, אך יש להביא בחשבון את העובדה שהתוספות מסתפקים בדיוק של ספרה אחת אחרי הנקודה בחישוב המספר $\sqrt{2}$ כלומר מניחים ש $\sqrt{2} = 1.4$, כמאמר הגמרא: "כל אמתא בריבועא אמתא ושני חומשי באלכסונא". חישוב האלכסון של ריבוע שאורכו 9 לפי קירוב זה ייתן אלכסון של שתים עשרה ושני חומשין.

ועדיין יש להבין מדוע תוספות מדברים על **משהוא** ושלש עשרה פחות שני חומשין ולא על שלש עשרה פחות משהוא.

נראה לומר שתוספות רוצים להדגיש את העובדה שגובהה של הנקודה על הכותל אליה מגיע הסולם הוא תשעה טפחים ועוד **משהוא**, לכן גם בחישוב של האלכסון בוחרים תוספות להוסיף את ה**משהוא** לשלשה עשר הטפחים ואז להוריד את שני החומשין מהחשבון.

בנוגע לשיטת אביי ממשיכים התוספות:

"ולאביי שלשה טפחים כשעור לבוד... ולאביי במשהו ועשרה פחות חומש"

פירוש דבריהם: הסולם אינו מגיע עד ראשו של הכותל (עשרה טפחים) אלא עד מעט למעלה משבעה טפחים מתחתיתו, כלומר במרחק לבוד מראשו, $y = 7 + \varepsilon$. לכן $x = y = 7 + \varepsilon$ ומכאן שאורך הסולם הוא בקירוב האלכסון $\sqrt{7^2 + 7^2} \approx 9.899$, אכן מספר קרוב מאוד ל-10.

לפי הצורה שבה מסבירים התוספות את דעות שאר האמוראים, נראה שהיותו של המשולש שווה שוקיים מהותי בעיניהם.

וכאן יש להבין, מדוע היות המשולש שווה שוקיים חשוב כל כך בעיני התוספות?

נשים לב לעובדה המתמטית הפשוטה שזווית הבסיס של משולש שהוא שווה שוקיים וישר זווית היא 45 מעלות. נראה שהתוספות סוברים שכדי שיהיה **נוח** לטפס על הסולם, **הזווית** בין פיסת הקרקע ובין הסולם (כלומר בין x ל y) צריכה להיות קבועה וגודלה 45 מעלות. זוהי הסיבה שהמשולש נדרש להיות שווה שוקיים. ואכן, תוספות הרא"ש (ד"ה צריך) מתייחס לעניין הנוחות בפירוש: "הלכך נראה לפרש דקסבר דצריך למשוך רגלי הסולם עשרה מן הכותל כדי שיהיה משופע ונח לעלות".

מעין דברים אלה ניתן למצוא גם בדברי הר"ח בסוגייתינו: "והסולם לעולם שאינו נסמך על הכותל לעלות בו אלא באלכסון אבל זקוף אין דרך לעלות".

ג. סוגיית בית שנפרץ

המשנה בדף צד ע"א דנה בחצר, בית או מבוי שנפרצו לרשות הרבים. פרצה כזאת עשויה לגרום לכך שאי אפשר יהיה לטלטל בתוך הבית, המבוי או החצר. דיון המשנה מוסב על השאלה האם האיסור לטלטל חל כבר בשבת זו או רק החל מהשבת הבאה.

אומרת המשנה:

> חצר שנפרצה לרה"ר משתי רוחותיה וכן בית שנפרץ משתי רוחותיו וכן מבוי שנטלו קורותיו או לחייו – מותרים באותו שבת ואסורים לעתיד לבא דברי רבי יהודה. רבי יוסי אומר אם מותרין לאותו שבת מותרין לעתיד לבא ואם אסורין לעתיד לבא אסורין לאותו שבת

כלל ידוע במסכת עירובין הוא שכדי שפרצה תצא מגדר פתח ועל כן תאסור את הטלטול, עליה להיות באורך עשר אמות לפחות.

הגמרא מעמידה את דברי המשנה במקרה שהפרצה הייתה בשני קירות בקרן זווית, כלומר בקירות שמצויים בפינת הבית.

רש"י מסביר שהפרצה שאורכה עשר אמות בשני הקירות היא פרצה של חמש אמות מצד אחד וחמש אמות מצד שני.

ושוב, עולה השאלה, כדברי תוספות ד"ה "וקירויו בארבע":

> "רש"י פירש שנפרץ הכותל חמש מכאן וחמש לכאן, ולא דק דאם כן לא הויא פרצה יתר מעשר אלא אלכסון של חמש על חמש דהיינו שבע אמות. ולא חש לדקדק בזה".

כדי לתרץ את שיטת רש"י מסביר בעל לשון הזהב[8] שאין דרך לפתוח פתח באלכסון ולכן אורכו של פתח שעשוי בקרן זווית **יש לחשב כסכום של אורכי שני צדדיו ולא כמרחק בין שני קצותיו**.

ליתר ביאור נוסיף שכאשר סוגרים פתח בקרן זווית המורכב משני פתחים של חמש אמות כל אחד, צריך לסגור עשר אמות ולא שבע אמות כמידת האלכסון.

גם כאן אנו רואים פתח לחישוב שונה של מרחק. חישוב שאינו מסתמך על המטריקה האוקלידית אלא על מטריקת נהגי המוניות. נרחיב על כך בהמשך.

8. דבריו מופיעים על הסוגיה בדף ו ע"א. וכן על הסוגיה בדף עח ע"א. בשני המקומות הוא מפנה לסוגייתנו.

ד. סוגיית חלון עגול - דיון מסכם בשיטת רש"י

המשנה בדף עו ע"א דנה בחלון שנמצא בין שתי חצרות. אם ממדיו ארבעה על ארבעה טפחים ואפילו מקצתו בגובה עשרה טפחים מהקרקע אז יכולים בני שני החצרות לעשות עירוב משותף או לערב כל חצר לעצמה, לפי בחירתם. אבל אם החלון קטן מארבעה על ארבעה (או שכולו בגובה למעלה מעשרה טפחים) אז אין לבעלי החצרות אפשרות לערב יחד.

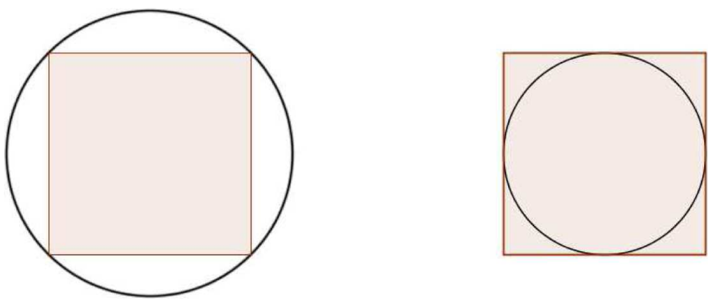
בגמרא מובאת מימרא של רבי יוחנן שאם החלון הוא בצורת **עיגול** – צריך שיהיה בהיקפו עשרים וארבעה טפחים ושיהיו לפחות שני טפחים מתוך ההיקף ועוד קצת מעל גובה עשרה טפחים, כדי ש"אם ירבענו, נמצא משהו בתוך עשרה".

הגמרא נושאת ונותנת בדברי רבי יוחנן, ולבסוף מגיעה לידי מסקנה שרבי יוחנן סובר כדייני דקיסרי כדלהלן: "רבי יוחנן אמר כי דייני דקיסרי ואמרי לה כרבנן דקיסרי דאמרי עיגולא מגו ריבועא ריבעא, ריבועא מגו עיגולא פלגא".

(תרגום: עיגול החסום בתוך ריבוע הוא רבע וריבוע החסום בתוך עיגול הוא חצי).

לא מפורש כאן על מה מוסבים היחסים "רבע" "וחצי".

רש"י מפרש: "ריבועא מגו עיגולא פלגא - בעי למשקל מיניה פלגא דהאי שיעורא דפייש דהיינו תילתא דמעיקרא דהוו להו תמניא מכ"ד ופשו להו שיתסר, דסבירא להו דכל אלכסונא הכי הוי".



איור 8

הסבר דברי רש"י כך הוא:

אם נכניס ריבוע שאורך צלעו ארבעה טפחים לתוך מעגל החוסם אותו, יהיה קוטר המעגל 8 טפחים. שטח מעגל כזה הוא 24 טפחים, שטח הריבוע 16 טפחים. אם נוריד שליש מ-24 נקבל 16. דברי הגמרא "ריבועא מגו עיגולא פלגא" מתפרשים כך: אם נוסיף לשטח הריבוע (16) חצי ממנו (8) נקבל את שטח המעגל החוסם אותו.

כיוון שקוטר המעגל הוא אלכסון הריבוע, דברי רש"י, שקוטר המעגל הוא 8 טפחים, סותרים את הגאומטריה האוקלידית, אך רש"י פותר את הבעיה בעצמו באמרו: "דסבירא להו [לדייני קיסרי] דכל אלכסונא הכי הוי".

כך משמע גם מדבריהם המפורשים של התוספות ד"ה **ורבי** יוחנן אמר כדייני דקיסרי כו':

"דקסבר אמתא בריבועא תרי אמתא באלכסונא".

אך התוספות דוחים גישה זו:

"וליתא להך דדייני דקיסרי כדאמר בפ"ק דסוכה (דף ח:) **דהא קא חזינא** דלאו הכי הוא שכל האורך והרוחב לא הוי אלא תרי אמה".

לכן מסבירים התוספות (ובאופנים שונים גם שאר המפרשים) את דברי דייני דקיסרי באופן אחר.

לכאורה, הוויכוח בין רש"י לתוספות מתמצה בכך שרש"י מבין את דברי דייני קיסרי כפשוטם, ואינו מדקדק בעובדה הגיאומטרית שהאלכסון של ריבוע שאורך צלעו ארבעה טפחים אינו יכול להיות שווה לשמונה טפחים, ואילו תוספות זועקים את זעקת אנשי הגיאומטריה:

"וקשה היאך טעו דייני דקיסרי? הא קא חזינן דלאו הכי הוא".

לעניות דעתנו, ניתן להבין את המחלוקת בין רש"י לתוספות באופן אחר. נבסס את דברינו על מטריקת נהגי המוניות. לפי מטריקה זו, אורך האלכסון של ריבוע שצלעו ארבעה טפחים אכן שווה לשמונה טפחים. כיון שאין בידינו מידע מספק על ידיעותיו של רש"י במרחבים מטרים, אין אנו טוענים שרש"י היה **מודע** למטריקה זו, אבל דבריו "דסבירא להו דכל אלכסונא הכי הוי" רומזים על כך שהבין שדייני דקיסרי קיבלו כאקסיומה את הטענה "אמתא בריבועא תרי אמתא באלכסונא". כאמור, לטענה זו יש צידוק מלא אם אנו משתמשים במטריקת נהגי המוניות.

הסבר זה, המבוסס על מטריקת נהגי המוניות, עובר כחוט השני לאורך כל הסוגיות שהובאו לעיל ופותר בעיות דומות אף בסוגיות נוספות במסכת, שלא צוטטו כאן. גם את דברי לשון הזהב שהובאו במהלך הדיון על סוגיות "מבוי" ו"בית שנפרץ" ניתן להבין באופן זה. כאשר בעל לשון הזהב מסביר שיש לחשב אורך אלכסון כאילו היה סכום שתי הצלעות דווקא, מדין הלכה למשה מסיני, כאילו היה אומר שעלינו להשתמש בגיאומטריה המבוססת על מטריקת נהגי המוניות כאקסיומה.

אם כנים דברינו, ראוי לברר מדוע קיבל רש"י את שיטת דייני קיסרי במסכת עירובין, למרות שהיא נדחתה באופן מפורש בסוף סוגיית סוכה עגולה (סוכה ח ע"א) כפי שראינו לעיל, מסיבה זו התוספות לא קיבלו את שיטת דייני דקיסרי שאמתא בריבועא תרי אמתא באלכסונא.

אולי ניתן לומר שרש"י ראה שיש לחלק בין הסוגיות של מסכת עירובין ובין הסוגיה במסכת סוכה, בשל העובדה שמסקנת הסוגיה בעירובין כדעת דייני דקיסרי ואילו במסכת סוכה דעתם נדחתה.

ה. נספח: ריבוע של עולם

על פי ההלכה, מותר לאדם להלך אלפיים אמה לכל כיוון ממקום מושבו בשבת. זהו הדין של תחום שבת. במקרה שהאדם נמצא במקום יישוב מודדים את התחום מסוף היישוב.

לכאורה צריך היה החישוב להיעשות באופן הבא:

סביב כל נקודה בעיר נצייר מעגל ברדיוס אלפיים אמה. איחוד כל המעגלים המוגדרים באופן זה הוא תחום שבת.

ואולם, מחדשת המשנה (נה ע"ב) שמתחילים לספור את מרחק אלפיים אמה משפתו של המלבן החוסם את העיר: "ועושין אותה כמין טבלא מרובעת".

הדבר מוסבר באופן ברור יותר בתוספתא שהגמרא מביאה בדף נה ע"א:

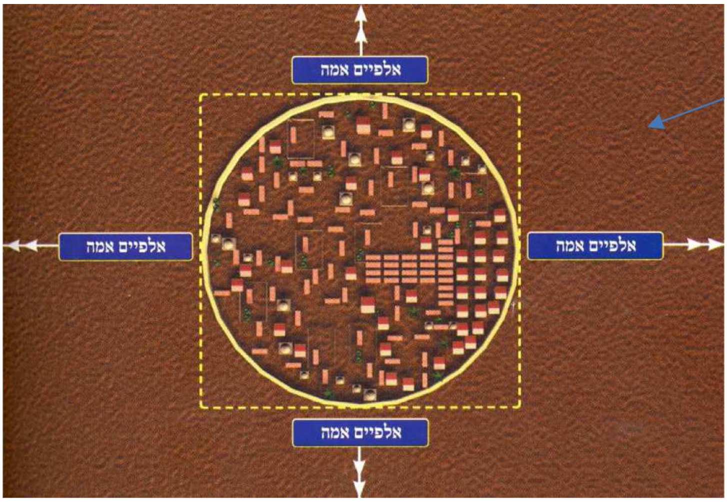
> "תנו רבנן כיצד מעברין את הערים ארוכה כמות שהיא, עגולה עושין לה זויות... היתה רחבה מצד אחד וקצרה מצד אחר רואין אותה כאילו היא שוה".

ומסביר רש"י:

> עגולה עושין לה זויות – כשבא למדוד תחומין לקצותיה לא ימדוד לה מהחומה אלא יוסיף לה ריבוע כלומר ירחיק מן החומה כדי ריבוע, דהא מרבינן פיאות לכל מילי דשבת, ואח"כ ימדוד תחומי הקרנות, שאם בא לצאת דרך קרן העיר ישתכר בהליכתו רביע דמרובע יותר על העגול רביע.

כלומר: מקיפים את העיר במלבן (רש"י מדבר על ריבוע, מובן שבמקרים שצורת העיר מחייבת זאת, נשתמש במלבן).

לדוגמה, אם העיר היא עגולה, כפי שמופיע בציור, כאשר אדם רוצה למדוד תחום שבת מהקצה הצפון מזרחי (מסומן בציור ע"י חץ) אין הוא מודד משפת העיגול אלא מהפינה הצפון מזרחית של הריבוע המקיף. ע"י כך הוא מרוויח 25%.



איור 9 – כמין טבלא מרובעת[9]

במתמטיקה מקובל להגדיר קבוצה במישור כ**קבוצה חסומה** אם יש עיגול שמכיל אותה.

כפי שהוסבר בהקדמה, בעוד העיגול המתאים למטריקה האוקלידית הרגילה, הוא מה שאנו רגילים לכנות בשם עיגול, העיגול המתאים למטריקת נהגי המוניות נראה כמו ריבוע. כאשר התורה מצווה לחשב תחום שבת של עיר שאינה מרובעת בעזרת הריבוע החוסם, ניתן לראות זאת כשימוש במטריקת נהגי המוניות.

9. באדיבות "מאורות הדף היומי".

כזוזא מלעיל כאיסתרא מלתחת
מחלוקת חכמים במציאות?

הרב דוד בן־עזרא [1]

I. הדיון התורני: מחלוקת רש"י ורבנו תם

מסכת סוכה דנה בכשרות הסכך ודורשת שהסוכה תהיה צלתה מרובה מחמתה. מה הדין אם צלתה שווה לחמתה? הגמרא מחלקת בין שוויון למעלה (בסכך עצמו) לשוויון כזה למטה (על קרקע הסוכה). הראשונים חלקו בפירוש חילוק זה. ברצוננו לבחון את טענות החולקים וליישב את המחלוקת, כשאנחנו נעזרים גם בידע הפיזיקלי של התפשטות אור השמש.

משנה מסכת סוכה פרק א משנה א

"סוכה שהיא גבוהה למעלה מעשרים אמה פסולה... ושחמתה מרובה מצילתה פסולה".

פירוש המשנה לרמב"ם (מהדורת הרב קפאח)

"ואמרו ושחמתה מרובה מצלתה פסולה, שמשמע שאם היתה חמתה וצלתה שוין שהיא כשרה, אינו אלא כשרואין כן בארץ, שאם ראינו שיעור השמש בארץ כשיעור המקום שהסכך מיצל עליו ואין בו שמש הרי זו כשרה, מפני שהחור שבסכך שהשמש נכנס בו פחות מן המסוכך כמו שמתבאר במופת במדע "אלמנאטיר" (אופטיקה) שהשמש אם נכנסה דרך חור יהיה זהרורה בארץ גדול יותר מאותו החור בהחלט."

1. הרב דוד בן עזרא הוא רב קהילת אורות יהודה בירושלים. הוא גם מרצה בכיר במחלקת פיזיקה שימושית/אלקטרואופטיקה במרכז האקדמי לב. יחד עם ד"ר שמעון בולג, הוא מחבר הספר "פיסיקה במקורות היהודיים". דוא"ל: benezra@jct.ac.il.

תלמוד בבלי מסכת סוכה כב ע"ב

"ושצילתה מרובה מחמתה כשרה. הא כי הדדי – פסולה, והא תנן באידך פירקין: ושחמתה מרובה מצילתה – פסולה, הא כי הדדי כשרה! – לא קשיא: כאן – מלמעלה, כאן – מלמטה. אמר רב פפא: היינו דאמרי אינשי: כזוזא מלעיל כאיסתרא מלתחת".

רש"י (שם)

"**כאן מלמעלה כאן מלמטה** – הא דדייקינן כי הדדי פסולה למעלה קאי, כשיש בין קנה לקנה כמלא קנה אפילו מצומצם פסולה, לפי שחמת האויר נראית בארץ רחבה הרבה מן הצל של סכך, והא דדייקינן כי הדדי כשרה – נקט שיעוריה מלמטה, שחמה וצל שוין, בידוע שהקנים רחבים מן האויר. **כזוזא מלעיל כאסתירא מלתחת** – כשהנקב רחב כשיעור זוז, חמתו מרובה למטה כשיעור סלע".

תוספות (מסכת סוכה, דף כב, עמוד ב)

"**כזוזא מלעיל כאיסתרא מלתחת** – כשנקב רוחב מלמעלה כשיעור זוז חמתה מרובה מלמטה כשיעור סלע כך פירש בקונטרס (כך פירש רש"י). והקשה רבינו תם דרב פפא גופיה דהכא אית ליה פרק קמא דעירובין (דף טו) פרוץ כעומד מותר והתם נמי פסקינן הלכתא הכי. ועוד קשה דאמר פרק קמא דקידושין (דף יא) דעבדי אינשי דקרו לפלגתא דזוזא איסתרא אלמא דאיסתרא פחות מזוזא. ומפרש רבינו תם... כאן מלמעלה מי שמודד האויר מלמעלה כי הדדי כשרה לפי שהוא עומד כפרוץ, אבל העומד מלמטה בארץ ומעיין כלפי מעלה ודומה כי הדדי פסולה לפי שהאויר שהוא רחב כי זוזא דומה בעיניו קטן כאיסתרא מחמת שהוא רחוק ממנו וראיה לדבר ונהי בעינינו כחגבים (במדבר יג) וכוכב גדול בשמים דומה בעינינו כקטן כדמוכח בפרק המוכר את הספינה (בבא בתרא דף עג).

לסיכום:

לפי רש"י: למעלה שווים, למטה חמתה מרובה מצלתה. מסקנה: הסוכה פסולה.
למטה שווים, למעלה צלתה מרובה מחמתה. מסקנה: הסוכה כשרה.
לפי ר"ת: למעלה שווים, פרוץ כעומד מותר. מסקנה: הסוכה כשרה.
למטה שווים, למעלה חמתה מרובה מצלתה. מסקנה: הסוכה פסולה.

המחלוקת ההלכתית נגלית לעין.

II. הדיון המדעי לישוב המחלוקת

מבוא: חשיבות המדע בהבנת סוגיות תלמודיות

א. חכמי ישראל השתמשו בידע המתמטי והמדעי המקובל בתקופתם בדיוניהם התורניים וההלכתיים. מתוך הבנת חוקי התפשטות האור (לפי פירוש הרמב"ם במשנה) ותכונת הראייה הזוויתית של עין הצופה (לפי פירוש רבנו תם) מנסים החכמים להבין את הנדון ולקבוע את ההלכה. נראה דוגמאות נוספות לשימוש במדע: במסכת עירובין (מג ע"ב) נאמר: שפופרת הייתה לו לרבן גמליאל שהיה מביט וצופה בה אלפים אמה ביבשה וכנגדה אלפים אמה בים... והרוצה לידע כמה גובהו של דקל, מודד קומתו וצלו, וצל קומתו, וידע כמה גובהו של דקל. בתלמוד ירושלמי עירובין (פרק ד, הלכה ב) נאמר כי מצודות היו לו לרבן גמליאל שהיה משער בהן עיניו במישר. ברור שיש שימוש במשולשים דומים ואולי גם בטריגונומטריה.

ב. המדע המתקדם מעניק כלים הן להבנת הסוגיה והן לחקירה יותר מעמיקה של הנושא מצדו ההלכתי. אין ספק שהידע המתמטי של הפונקציות המעריכית והלוגריתמית מקלות בהבנת כמה משניות וסוגיות. דוגמה לזה במסכת תרומות (פרק ה הלכה ז): סאה תרומה שנפלה למאה. הגביהה ונפלה אחרת, הגביהה ונפלה אחרת, הרי זו מותרת עד שתרבה תרומה על החולין: כמה פעמים פעולת הנפילה וההגבהה תיעשה והתרומה תישאר רבה על החולין? השימוש בפונקציות המעריכית והלוגריתמית יביאו לפיתרון מהיר של השאלה.

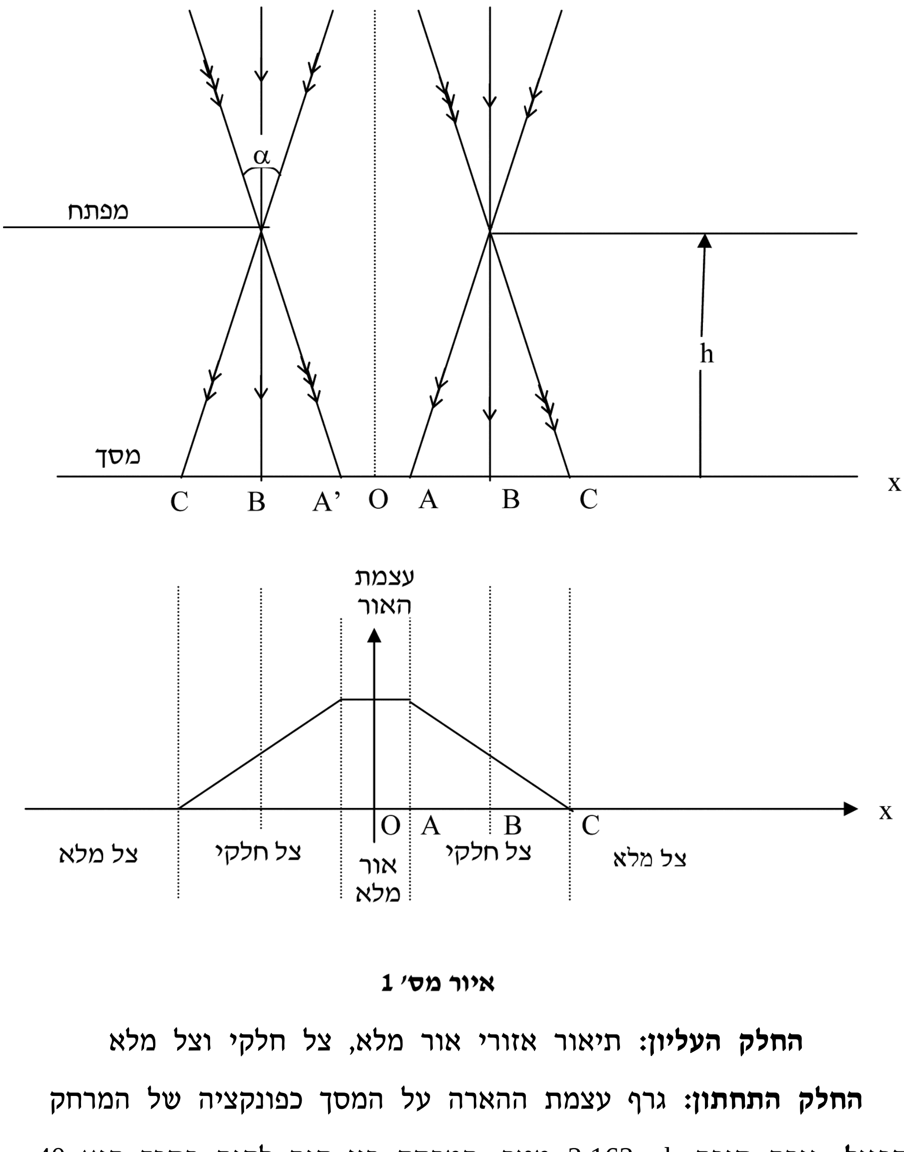
יצירת אור וצל על ידי מקור לא נקודתי רחוק (לדוגמה השמש)

כשמקור האור רחוק, כפי שמתואר בסרטוט מס' 1 (בחלקו העליון), יוצאות קרניים מקבילות מכל נקודה שעליו. הקרניים שלהן חץ אחד מגיעות ממרכז המקור. הקרניים שלהן שני חצים מגיעות מקצה אחד של המקור והקרניים שלהן שלושה חצים מגיעות מהקצה השני של המקור. לכן רואים את אזורי האור המלא והצל החלקי, לפי סרטוט מס' 1 (בחלקו התחתון). A'A אזור אור מלא, AC ו A'C' אזורי צל חלקי, ומחוץ ל C ו C' צל מלא. הציור שמתחת למהלך הקרניים הוא הגרף של עצמת האור על המסך, הנמצא במרחק h מן המִפתח. הקו היורד בגרף מתאר את ירידת האור באזור זה של אור וצל חלקי בצורה לינארית.

להלן נתונים של השמש:

L_{SE}: מרחק שמש-כדור הארץ: $1.496*10^{11}$ מטר

D_S: קוטר השמש: $1.392*10^{9}$ מטר



איור מס' 1

החלק העליון: תיאור אזורי אור מלא, צל חלקי וצל מלא

החלק התחתון: גרף עצמת ההארה על המסך כפונקציה של המרחק

תרגיל: גובה סוכה h =2.162 מטר. המרחק בין קנה לקנה בסכך הוא a =40 מ"מ. נניח שגם רוחב הקנה 40 מ"מ. זווית הראייה של השמש α=0.53 מעלות. חשב את תחומי האור המלא והצל החלקי.

תשובה: מסרטוט מס' 1 נחשב את AB.

$$AB = h \cdot tan\frac{\alpha}{2} = 2.162 \cdot tan\frac{0.53}{2} = \text{10 מ"מ}$$

AC = 10 x 2 = 20 מ"מ

AC הוא אזור הצל החלקי.

אזור האור המלא הוא: 20 מ"מ = 2 (20 – 10) = 2 (OB – AB)

אזור האור המלא והחלקי CC′ =a + 2 AB. במקרה זה 60 מ"מ.

שים לב: א. קוטר האזור לאור מלא, קטן מהמרחק בין קנה לקנה.

ב. גודל האזור של הצל החלקי תלוי רק בגובה הסוכה ולא במרחק בין קנה לקנה.

אם AC = a לא יהיה צל בקרקע הסוכה. במקרה זה גובה הסוכה הוא 4 מטר.

III. דיון בהסברם של הרמב"ם ושל רש"י

לפי מה שהוסבר במבוא המתמטי אור וצל שמוטלים על המסך (קרקע הסוכה) ממקור אור לא- נקודתי רחוק (השמש), דרך מִפתח כלשהו (רווח בין קנה לקנה) מחולקים לשלושה אזורים:

אזור של אור מלא, אזור של אור וצל חלקי ואזור של צל מלא. לפי החישובים שערכנו, הגענו למסקנה שאזור האור המלא קטן מהמִפתח (רווח בין קנה לקנה בסכך הסוכה), ולכן צלתה של הסוכה הזאת מרובה מחמתה. ואולם אם נכלול את האזור של האור והצל החלקי באזור האור המלא, נמצא שהאזור הזה גדול בשטחו משטח המִפתח, ולכן נאמר שחמתה של סוכה זו מרובה מצלתה. רש"י והרמב"ם ביססו את פירושם על חוקי התפשטות האור והגיאומטריה, והגמרא סמכה על "היינו דאמרי אינשי: כזוזא מלעיל כאיסתרא מלתחת" (זה שאומרים "אנשים" כזוז למעלה (בסכך) כאיסתרא (גדול מזוז) למטה על קרקע הסוכה). עיין בנספח דיון על הזוזא והאיסתרא.

IV. דיון בסברתו של רבנו תם לפי התוספות:

רבנו תם מקשה על רש"י שתי קושיות:

א. יש כלל בדיני עירובין האומר "פרוץ כעומד מותר". כלומר, אם בגדר המתירה טלטול חפצים בשבת בתוך שטחה יש פרצות, כל זמן ששטח הפרצות

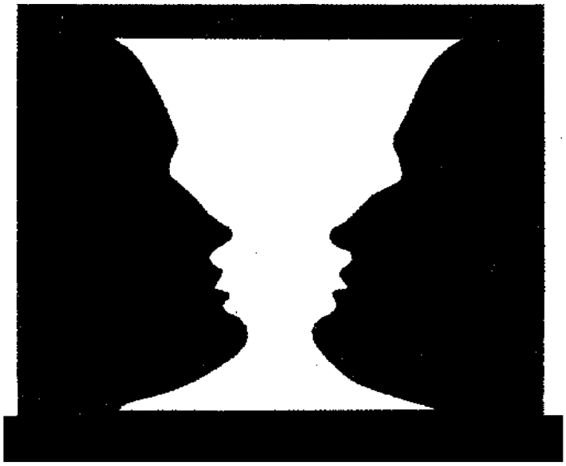
שווה לשטח המחיצה העומדת, גדר זו כשרה. ובעניין סכך של סוכה אם שטח החמה שווה לשטח הצל בסכך, כלומר רוחב הקנה של סכך שווה לרווח שבין קנה לקנה, סכך זה כשר ואם כן מדוע רש"י פוסל.

ב. הגמרא בקידושין (יא ע"ב) אומרת: "עבדי אינשי דקרי לפלגא דזוזא איסתרא" [תרגום: אנשים קוראים לחצי זוז איסתרא] ולכן איסתרא קטנה מזוזא ולא כפי שמסביר רש"י.

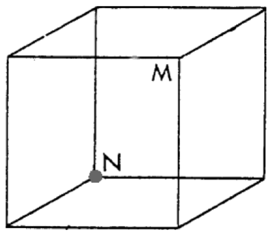
לשתי השאלות השיבו בדרכים שונות מפרשים ופוסקים (המאירי, הריטב"א ובית יוסף אורח חיים), אף על פי כן יש לרבנו תם פירוש אחר בגמרא, שהוא מבססו על הסבר ניסיוני: "שכוכב גדול בשמים דומה בעיניו כקטן". ולכן אם אדם מודד או משער מלמטה, כשהוא על קרקע הסוכה, שהאוויר (הרווח בין קנה לקנה) שווה לרוחב הקנה, בידוע שלמעלה חמתה מרובה מצלתה ופסולה. אם מודד מלמעלה על הסכך עצמו ומוצא שהאוויר שווה לרוחב הקנה כשרה לפי הכלל "פרוץ כעומד מותר". לכאורה, הסבר זה תמוה. אמנם מרחוק הרווח בין קנה לקנה נראה קטן, אבל גם הקנה נראה קטן באותה מידה, לכן אם שווים למטה הרי הם גם שווים למעלה כפי שטוען הריטב"א, ולפי סברתו בכל מקרה הסוכה תהיה כשרה.

אפשר ליישב דברי רבנו תם אלו על פי כלל פסיכולוגי הקשור לחוש הראייה. כשאדם מסתכל על שטח ובו צורות, תשומת לבו של הצופה קובעת מהו הרקע שעליו נמצאות הצורות ומהן הצורות (דוגמה לכך מובאת בציור שלמטה (אשליות הראייה הגביע של Rubin). ולסוגייתנו, הנמצא בתוך הסוכה ומסתכל כלפי מעלה אל הסכך קובע את הרווח שבין קנה לקנה כצורה המוטלת על כל הסכך. ולכן החורים ייראו קטנים בעוד כל הסכך ייראה לצופה בגודלו הראשוני: אם תחושתו של הצופה היא שהם שווים ודאי חמתה מרובה מצלתה.

V. מאשליות הראייה



הגביע של Rubin
מהי הצורה ומהו הרקע? אם הצבע השחור משמש רקע, הצבע הלבן יראה כגביע; אם הצבע הלבנו משמש רקע, הצבע השחור ייצור שני פרצופים.



הקוביה של Necker
לפי רצון הצופה תיראה הפאה ש-M **כתובה עליה כקרובה אלינו ופאת** N **רחוקה מאיתנו, או להיפך.**

לסיכום: רבנו תם קובע את כשרות הסוכה בסכך עצמו, ומשלב את תחושתו של הצופה אם הוא מסתכל על הסכך מלמטה. שיטת רש"י והרמב"ם היא שנקבעה להלכה. נעיין שוב בהלכה זו לאור הנתונים של השמש.

VI. דיון מדעי מתקדם וחומר למחשבה

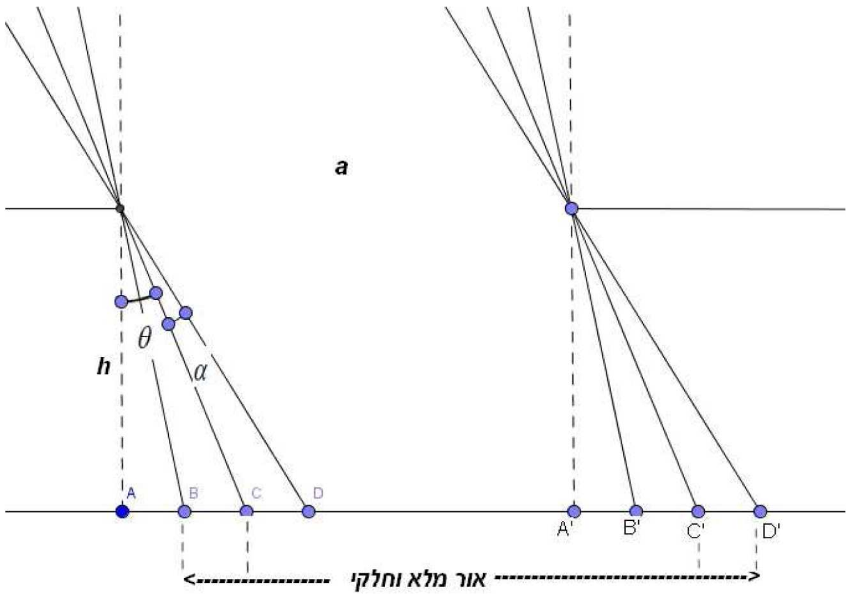
אם נניח שהסכך עשוי מקנים שרוחבם b והרווח ביניהם a, כך ש b > a ביחס של פי 2 או פי 3, לכל הדעות סוכה זו כשרה ולא משנה מהו גובהה, כי צלתה מרובה מחמתה לפי הנחתו של רבנו תם "שהעומד מרובה על הפרוץ", שמקובלת על כל הפוסקים לפי התנאי הנ"ל. לפי החישובים שנערכו לעיל בהתחשב בצל החלקי יוצא שלא יהיה צל בסוכה אם הקשר הבא יתקיים

$$b + a = 4h\tan\frac{0.53}{2}$$
$$b + a = 0.0185h$$

לדוגמה, אם $b=3a$, וגובה הסוכה 2 מטר, אם הקנה 30 מ"מ והרווח בין הקנים 10 מ"מ לא יהיה צל בסוכה בסיבת הצל החלקי. סוכה זו כשרה לכל הדעות, ולפי החישובים הצל מועט.

אם נשלב גם את זווית הנטייה של השמש בשעות היום יימרח האור החלקי והסוכה תהיה חמתה מרובה מצלתה

אם השמש נוטה לצד מערב או מזרח בזווית θ, כאשר α שווה ל: $0.53°/2$



איור 2: אור מלא וחלקי כשהשמש נוטה בזווית θ

$$AC = h\tan\theta$$
$$AB = h\tan(\theta-\alpha)$$
$$c = AC - AB = h\tan\theta - h\tan(\theta-\alpha)$$
$$= \frac{2h\tan\alpha\left(1+\tan^2\theta\right)}{1+\tan\theta\tan\alpha}$$

התנאי למעלה הופך ל–

$$b + a = \frac{2h\tan\alpha\left(1+\tan^2\theta\right)}{1+\tan\theta\tan\alpha}$$

אם , אזי

$$. b+a=\frac{4h\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

<u>שאלה לעיון:</u> האם צריך להתחשב ביחסי "העומד והפרוץ" כדי שתהיה צלתה מרובה מחמתה? האם צריך שבכל שעות היום תהיה צלתה מרובה מחמתה בהתחשב בזווית הנטייה של השמש?

נספח

ערכים וגדלים של מטבעות הזוזא והאיסתרא

הקדמה: בתלמוד מוזכרות בין היתר שתי מערכות כספים. המערכת האחת נקראה "מטבע היוצא", כלומר היוצא באותו מקום, כסף מדינה. מטבע מהטבעה מקומית – בדרך כלל היו במטבע שבעה חלקי נחושת וחלק אחד כסף (ראו ירושלמי כתובות פרק א הלכה ב וכן פירוש המשניות לרמב"ם שם, רמב"ם משנה תורה הלכות אישות פרק י הלכה ח, וביאור הגר"א אהע"ז שם סימן סו ס"ק כב. ועיין בס' נחלת שבעה סי' יב בארוכה). במערכת השנייה היו המטבעות שנטבעו במטבעה בעיר צור. מטבעות אלה היו בדרך כלל עשויי כסף וערכם פי 8 מערכם של מטבעות כסף מדינה.

איסתרא: שם של מטבע הנקרא Stater. מקורו אצל היוונים והוא שימש גם את הרומאים אשר הטביעו סטטרים בצורות שונות מכסף ומנחושת. ערכו של האיסתרא העשוי כסף היה 4 דינרים. מטבע זה היה מטבע קטן בקוטרו, וערכו נבע מכמות הכסף שבו. הסוג השני מנחושת, היה אמנם גדול יותר בקוטרו, אולם ערכו היה נמוך משל מטבע הכסף. נראה שהמטבע הנזכר כאן הוא של "כסף מדינה" ששוויו היה שמינית משוויו של איסתרא עשוי כסף, כלומר חצי דינר. כאמור, מטבעות הנחושת היו גדולים יותר אך פחותים בערכם (השוו פירוש המשניות לרמב"ם בכורות פרק ח'משנה ח', רש"י מסכת כתובות דף סד ע"א ד"ה פלגא).

באיור מס' 3 איסתרא שנטבע לכבודו של הקיסר הרומי טריינוס דקיוס (Trajanus Decius) שחי בתקופת חתימת המשנה, בשנת 250 לערך.

איור 3: איסתרא

זוז: הוא הנקרא דינר סתם (ראו רמב"ם הלכות אישות פרק י הלכה ח ושו"ת רבנו אברהם בן הרמב"ם סי' פב). ראו במשנה מסכת בבא קמא פ"ד משנה א, ש-50 זוז הם חצי מנה, והמנה הוא 100 דינרים. הדינר היה מטבע כסף קטן, ערכו כשכר יומי ממוצע של פועל שכיר יום לא מיומן (ראו בראשית רבה סוף חיי שרה פרק סא סימן ו, בבלי עבודה זרה סב ע"א, בבא בתרא פב ע"ב). שוויו 192 פרוטות.

איור 4: דינר כסף

באיור מס' 4 אנו רואים דינר כסף שנטבע לכבודו של אספסיינוס קיסר, אביו של טיטוס הרשע, כובש ירושלים. המטבע נטבע בתקופת כיבושה של ירושלים. משקלו כ-3.5 גרם וקוטרו כ-20 מ"מ.

מכאן נוצר הפתגם "**כזוזא מלעיל וכאיסתרא מלתחת**" (כזוזא מלעיל = מטבע קטן אבל בעל ערך גדול) נראה על הקרקע כמטבע גדול יותר (איסתרא של נחושת), אולם ערכו קטן.

שיטתו של רבנו תם מסתמכת על כך שמדובר באיסתרא של "כסף צורי" מטבע הנטבע במטבעה של העיר צור. זהו מטבע השווה ל-4 דינרים. גודלו קטן מגודלו של זוז אך ערכו גדול מערך זוז.

טבלת השוואה בין מטבעות המוזכרים בסוגיה:

	איסתרא של כסף (סלע צורי)	זוז (דינר)	איסתרא	שווי המטבע בפרוטות	ערך המטבע בגרם כסף טהור
איסתרא של כסף (סלע צורי)	1	4	8	768	19.2
זוז (דינר)	¼	1	2	192	4.8
איסתרא	1/8	½	1	96	2.4